Mécanique des Fluides Compressibles
Annexe: Ondes de choc droites dans un fluide quelconque

Dr. Flavio NOCA

Semestre printemps 2024-2025

Relations pour ondes de choc

- Conservation de la masse

$$\left[\rho w_n\right] = 0$$

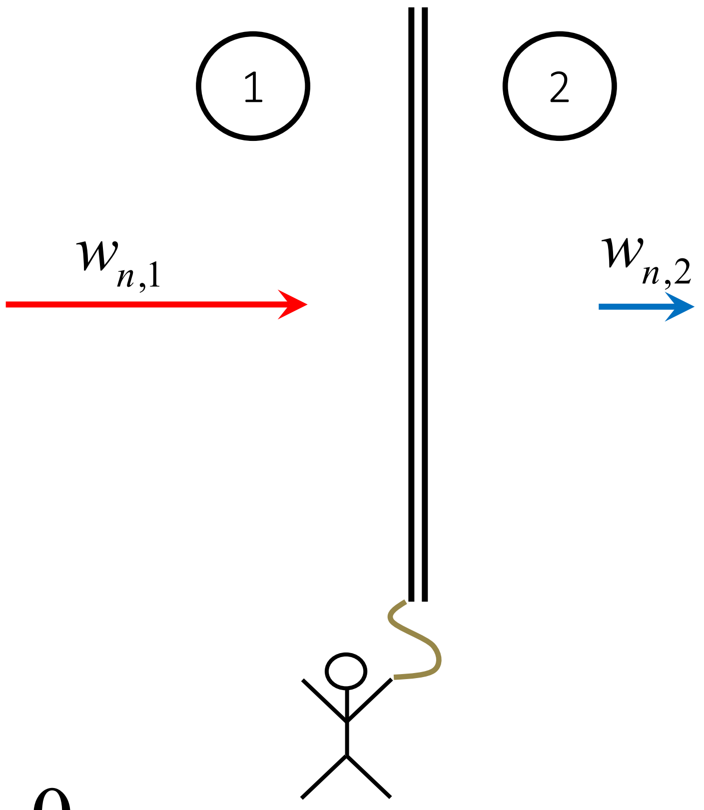
- Conservation de la quantité de mouvement

$$\left[\rho w_n^2 + p\right] = 0$$

- Conservation de l'énergie

$$\left[h + \frac{w_n^2}{2}\right] = 0$$

- 2ème principe de Thermodynamique $\quad [s] > 0$



Conservation de l'énergie

$$h_1 + \frac{w_{n,1}^2}{2} = h_2 + \frac{w_{n,2}^2}{2} \Rightarrow h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(w_{n,1} - w_{n,2})(w_{n,2} + w_{n,1})$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$p_1 + \rho_1 w_{n,1}^2 = p_2 + \rho_2 w_{n,2}^2 \Rightarrow w_{n,1} - w_{n,2} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 w_{n,1}}$$

Conservation de la masse

$$\rho_1 w_{n,1} = \rho_2 w_{n,2} \Rightarrow w_{n,2} + w_{n,1} = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\rho_1 w_{n,1}$$

- On remplace dans l'équation d'énergie

$$\boxed{h_2 - h_1 = \frac{p_2 - p_1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = \frac{v_1 + v_2}{2}(p_2 - p_1)}$$

$$\boxed{h_2 - h_1 = \frac{v_1 + v_2}{2}\left(p_2 - p_1\right)}$$

- Si l'on a la relation constitutive pour le fluide

$$h = h(p, v)$$

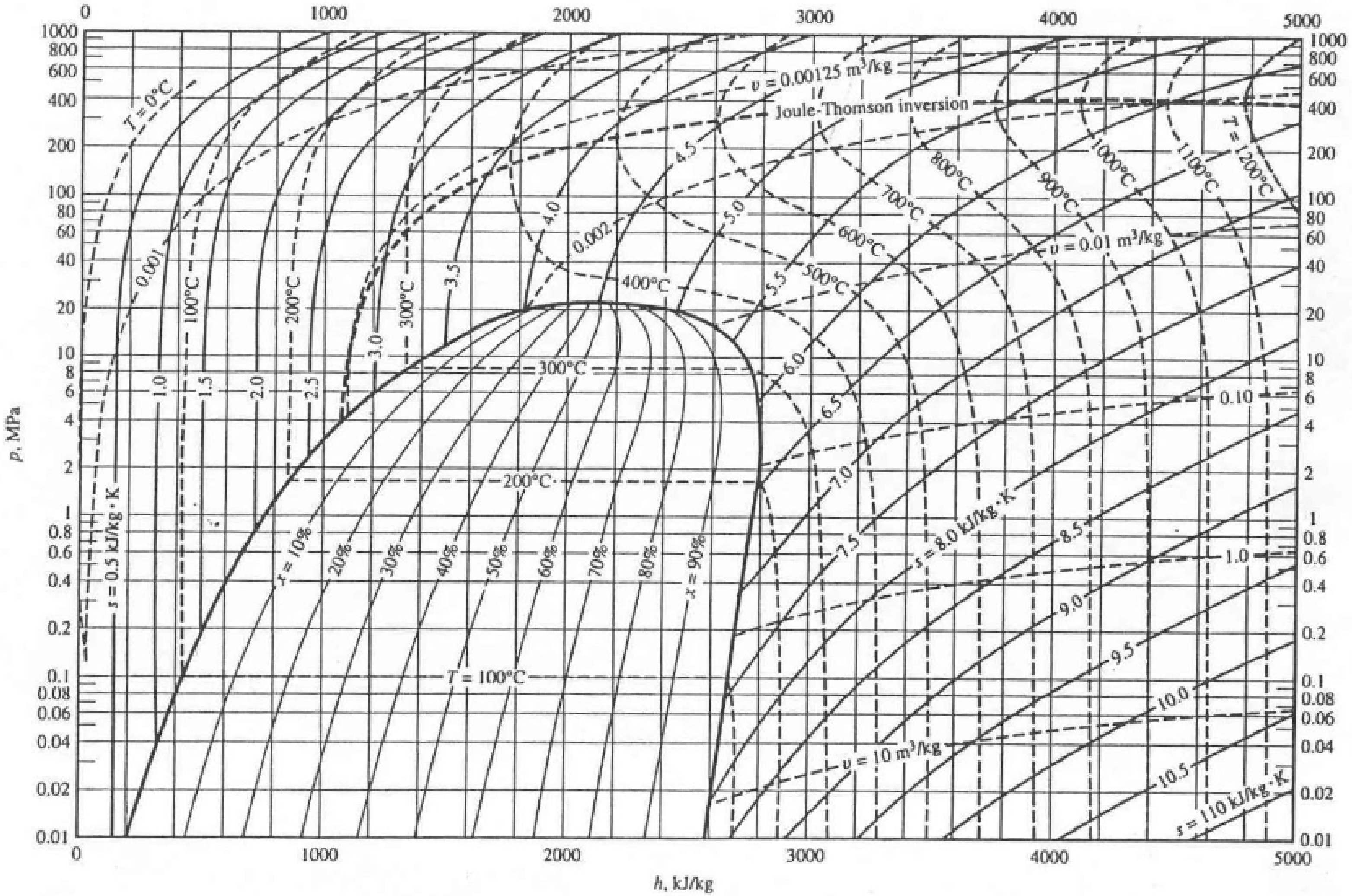
- Alors on aura une relation

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = f^n\left(\frac{v_2}{v_1}\right)}$$

Pour un gaz parfait

$$h = c_p T + const. = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p v + const.$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1} - \dfrac{v_2}{v_1}}{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{v_2}{v_1} - 1}$$



p, MPa
h, kJ/kg
v = 0.00125 m³/kg
Joule-Thomson inversion
T = 0°C
0.001
0.002
100°C
200°C
300°C
400°C
500°C
600°C
700°C
800°C
900°C
1000°C
1100°C
T = 1200°C
v = 0.01 m³/kg
0.10
1.0
v = 10 m³/kg
T = 100°C
s = 0.5 kJ/kg · K
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0
6.5
7.0
7.5
s = 8.0 kJ/kg · K
8.5
9.0
9.5
10.0
10.5
s = 11.0 kJ/kg · K
x = 10%
20%
30%
40%
50%
60%
70%
80%
x = 90%

- Conservation de la masse

$$\left[\rho w_n\right] = 0$$

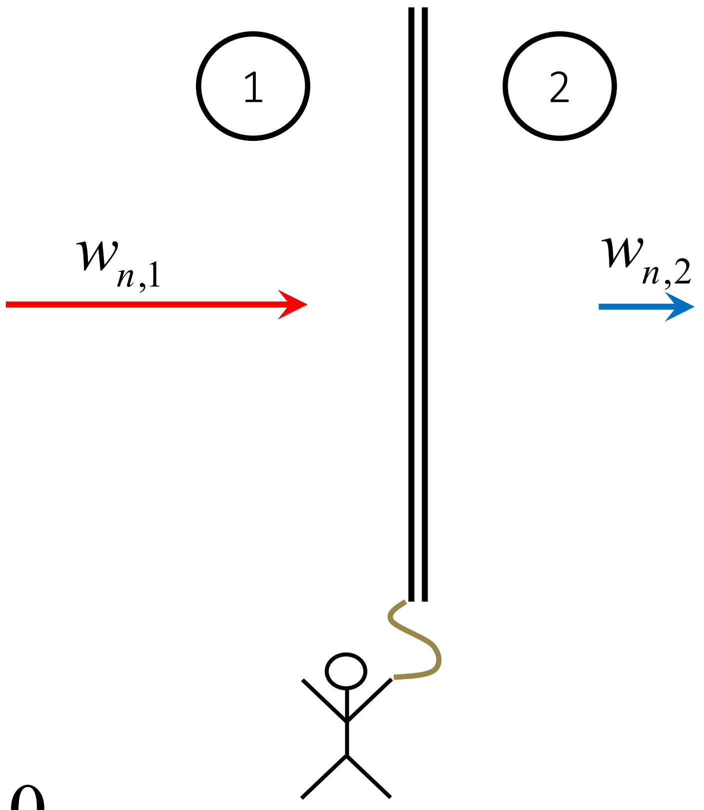
- Conservation de la quantité de mouvement

$$\left[\rho w_n^2 + p\right] = 0$$

- Conservation de l'énergie

$$\left[h + \frac{w_n^2}{2}\right] = 0$$

- 2ème principe de Thermodynamique $\left[s\right] > 0$



Quelques relations utiles

- $$w_{n,1} \cdot w_{n,2} = \frac{[p]}{[\rho]}$$

- $$j^2 = -\frac{[p]}{[\upsilon]}$$

- $$\Pi = -M_{n,1}\frac{[w_n]}{a_1} = -M_{n,1}^2\frac{[\upsilon]}{\upsilon_1}$$

- $$[w_n]^2 = -[p][\upsilon]$$

- Débit massique surfacique

$$\boxed{j \equiv \rho_1 w_{n,1} = \rho_2 w_{n,2}}$$

- Mesure de l'intensité du choc

$$\boxed{\Pi \equiv \frac{[p]}{\rho_1 a_1^2}}$$

Chocs forts, chocs faibles

- $\Pi = \dfrac{[p]}{\rho_1 a_1^{\ 2}}$ (parfois $\Pi = \dfrac{[p]}{p_1}$)

- Choc faible $\Pi \ll 1$
- Choc fort $\Pi \gg 1$

Accroissement d'entropie pour chocs faibles

- La relation de Rankine-Hugoniot peut s'écrire

$$[h] = v_1[p] + \frac{1}{2}[v][p]$$

$$h_2 - h_1 = \frac{v_1 + v_2}{2}(p_2 - p_1)$$

- On effectue un développement de Taylor de h(s, p) et v(s, p)

- On utilise des relations de Maxwell

$$T = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p, \quad v = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s$$

- On trouve

$$\boxed{\frac{[s]}{a_1^2 / T_1} = \frac{1}{6} \cdot \Gamma_1 \cdot \Pi^3 + O\left(\Pi^4\right)}$$

$$\Gamma \equiv \frac{a^4}{2v^3}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s$$

Accroissement d'entropie pour chocs faibles

$$\boxed{\frac{[s]}{a_1^2/T_1} = \frac{1}{6}\cdot\Gamma_1\cdot\Pi^3 + O\left(\Pi^4\right)}$$

$$\Gamma \equiv \frac{a^4}{2v^3}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s$$

- Comme le 2ème principe de thermodynamique impose $[s] > 0$

alors le signe de Γ dicte le signe de $[p]$

$\Gamma > 0$	$\rightarrow$	$p_2 - p_1 > 0$	$\rightarrow$	onde de choc de compression
$\Gamma < 0$	$\rightarrow$	$p_2 - p_1 < 0$	$\rightarrow$	onde de choc de détente

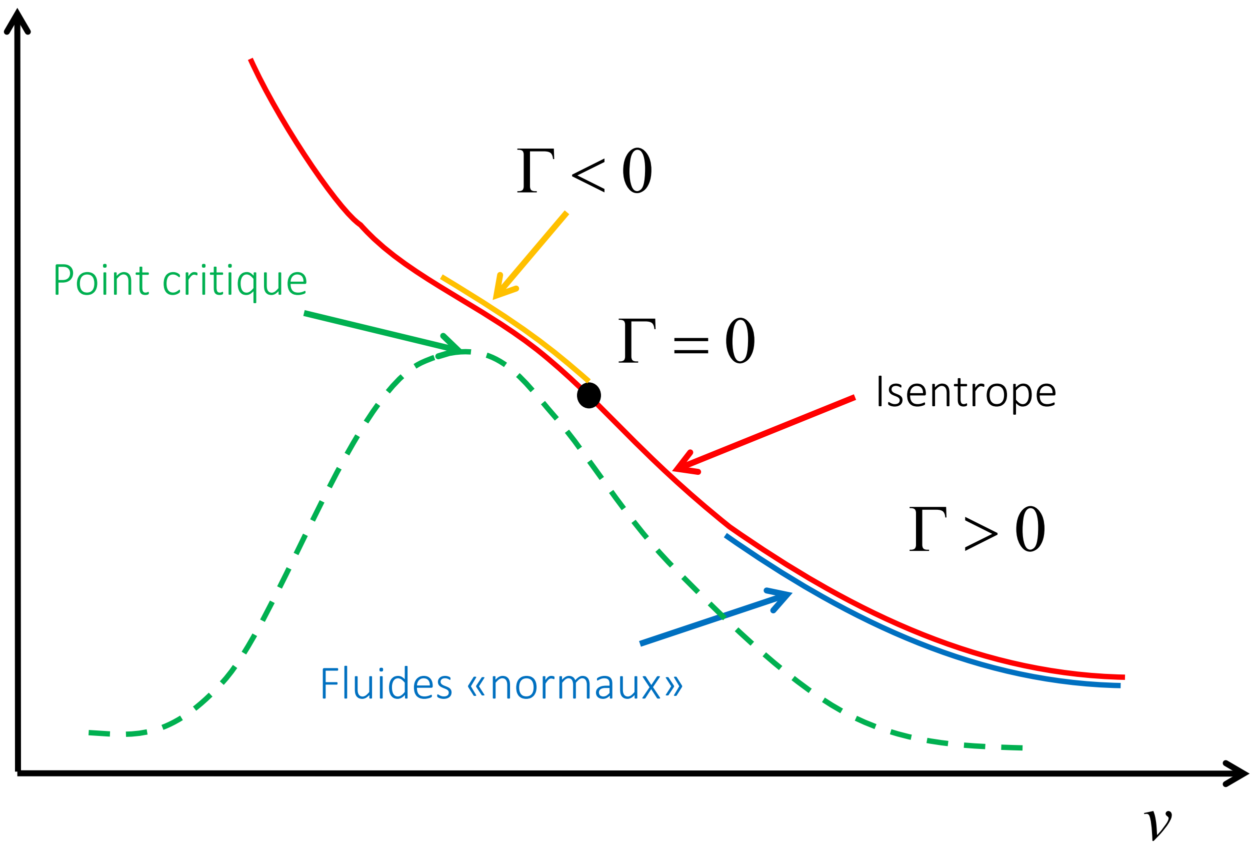
- Les variations d'entropie pour des chocs faibles varient comme Π^3

- Cas ésotérique

$$\frac{[s]}{a_1^2/T_1} = \frac{1}{6}\cdot\Gamma_1\cdot\Pi^3 + \dots$$

$$\Gamma = \frac{a^4}{2v^3}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s$$

Prop à la courbure de l'isentrope sur diagramme p-v



- Pour des fluides proches du point critique, on peut avoir des **chocs de détente (ou raréfaction)**.